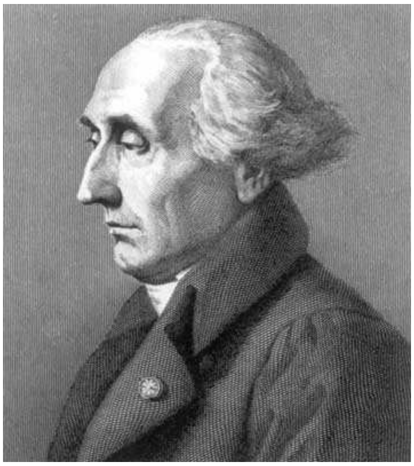
數學傳播　47卷4期, pp. 15-41

Lagrange 的參數變數法

林琦焜



Lagrange: 一座高聳的金字塔

1. 拉格朗日— 一座高聳的金字塔

『拉格朗日是數學科學高聳的金字塔。』

— 拿破崙 (1769~1821) —

這段話是出自拿破崙對於十八世紀最偉大並且最謙遜的數學家 — 約瑟夫-拉格朗日 (Joseph-Louis Lagrange, 1736~1813) 的讚賞。的確這段話也沒有過譽而是經過審慎斟酌的評價。拿破崙還慷慨地任命拉格朗日爲法蘭西共和的第一位參議員, 與種種他身爲國王能力所及並授予的榮譽。近代科學自從微積分的發明以來, 法國數學界雖然人才輩出, 但直到拉格朗日的出現才真正站在數學與科學這個金字塔的最頂端。

拉格朗日於 1736 年出生於義大利的都靈 (Turin), 他身上同時有法國與義大利的血統但法國的血統居多。拉格朗日出生在一個富裕的家庭, 但由於他父親失敗的金融投機, 到拉格朗日準備繼承家產時已經沒有甚麼好繼承的了。後來拉格朗日把這個不幸視爲他生命中所發生最幸運的事。拉格朗日接受的是基於古典文學的傳統教育, 會走上數學這條路多少有點偶然。起初在都靈大學讀書期間, 他對數學並沒有很大的熱情, 並且覺得希臘幾何相當的沉悶, 雖然也接觸了

歐幾里德的幾何原本還有阿基米德的著作。但這些並沒有給他留下多少印象。後來整個故事的轉折點是由於哈雷 (Edmond Halley, 1656∼1742) 的一篇文章 (1693) 關於代數應用於光學, 文中哈雷盛讚微積分比希臘的幾何方法優越。拉格朗日深深被這篇文章所吸引並立志以數學爲自己一生的事業。也許數學界必須感謝拉格朗日的父親失敗的金融投機, 因爲拉格朗日後來聲稱:

『如果我很富有, 可能就不會將自己奉獻於數學。』

在短的令人難以置信的時間內, 他幾乎是憑一己之力就完全掌握了那個時候的 (數學) 分析。沒有人知道拉格朗日的指導教授是誰, 我們可以說他是無師自通, 但要打通任督二脈還必須有高人指點。那個年代數學第一人就是人們稱爲『分析的化身』的歐拉 (Leonhard Euler, 1707∼1783), 所以拉格朗日是透過研究歐拉的著作來到數學的最前沿 (frontier)。1755 年拉格朗日寫了一封文情並茂的信給歐拉, 而出乎意料的是人格高尚的歐拉回覆了一封大度且熱情的信給這個年輕人:

『你似乎已將極大、極小理論帶到了差不多是最高的完善程度; 我羨慕你無邊的洞察力。』

歐拉總是非常寬大地欣賞他人的工作。他對待年輕的拉格朗日的態度, 是科學史上無私且最美好的例子, 是數學史最高尚的人格典範。實際上拉格朗日最好的工作絕大部分都是直接由歐拉的工作所激發的, 雖然他是自學成材, 但我們仍然可以說歐拉是拉格朗日 (透過通訊), 精神上的老師。拉格朗日最重要的工作之一無非就是變分學 (Calculus of Variation) 並將之應用到牛頓力學而形成古典力學 (天體力學) 中的 Lagrange 力學。他 19 歲時受歐拉的影響並將自己的研究成果寄給歐拉, 這位全世界最著名的數學家立刻看出它們的價值並鼓勵這位才華橫溢的年輕人繼續研究下去。四年之後拉格朗日藉由純分析的方法, 克服了歐拉利用半幾何方法的困境, 解決了等周長問題 (Isoperimetric problem)。這裡更令人敬佩的是歐拉並沒有立刻發表他的成果, 而是等到拉格朗日能夠先發表, 並回信說:

『這是爲了不剝奪應該屬於你的榮耀。』

這就是 Euler-Lagrange 方程背後感人的故事, 雖然主要的方法是拉格朗日給的, 但科學界仍然將歐拉列爲首位, 以紀念他對變分學開創性的貢獻。而拉格朗日也因爲變分學這個傑出的工作, 統一了牛頓力學, 就是今天人們所稱的拉格朗日力學 (Lagrangian Mechanics), 而且如漢密爾頓 (Sir William Rowan Hamilton, 1805∼1865) 所言把它處理成「一首科學的詩」, 這個代表作就是《分析力學》。

除了歐拉之外, 拉格朗日也與當時法國首席數學家達朗貝爾 (Jean le Rond d'Alembert, 1717∼1783) 通信交流並發展爲親密的友誼關係, 而這友誼一直持續到 1783 年達朗貝爾逝世,

未曾間斷過, 甚至在他過世之前仍然鼓勵深受憂鬱困擾的拉格朗日不要放棄數學。本文所談的參數變數法實際上也是拉格朗日與達朗貝爾交流的成果之一[1], 我們可以看出來達朗貝爾降階法 (d'Alembert's reduction of order) 的影響。但兩者還是有本質上的差異, 降階法是從已知的一個解求得第二個獨立解, 而拉格朗日參數變數法則是由齊次解得出非齊次線性微分方程的特解。其實拉格朗日這個結果也蘊含了格林函數 (Green's function) 的思想, 只是格林 (George Green, 1793～1841) 當初考慮的是電磁學的 Poisson 方程。

有人說拉格朗日是數學史上人格最高尚的數學家。沒錯, 一個被溫暖對待的人, 對他人也必然是恩慈與寬厚的。拉格朗日從義大利的都靈出道, 接著到普魯士科學院接替歐拉, 最後定居在巴黎, 一路都有貴人相助, 但更重要還是他才學出衆與謙遜的人格而深受衆人的敬重。當巴黎綜合理工學院 (École polytechnique) 成立的時候 (1779), 拉格朗日被任命爲第一位數學教授, 從此那個時代最偉大的數學家成爲最偉大的數學教育家。有鑑於牛頓與 Leibniz 基於無窮小無限大的概念對這些學生很難接受, 於是他另闢蹊徑將函數定義爲解析函數, 並以此來發展微積分。不到四分之一個世紀, 拉格朗日的解析函數論就以失敗告終, 雖然如此, 它提供了無窮級數中心地位的泰勒級數堅固的基礎, 而後導致了柯西 (A. Cauchy, 1789～1857) 與後來 Karl Wererstrass (1815～1897) 將微積分或數學分析建立在 $\epsilon-\delta$ 的革命, 我們可以稱之爲《分析的算術化》。

拉格朗日從頭到尾都是一個典型的分析學家, 雖然如此他在數論與代數也有開創性的貢獻。他在柏林 (普魯士科學院) 期間針對文藝復興以來人們最關心的《*多項式方程式是否有根式解?*》發表了《*關於代數方程式解法的思考*》, 討論了在他以前人們熟知的二次三次與四次多項式方程式的解法, 並引進拉格朗日預解式。雖然拉格朗日本人並沒有解決這個問題, 但是在他的工作中已經蘊含了解答的途徑。它將在十九世紀的大數學家柯西, Abel, Galois, . . . 等人的工作再次出現, 並造成群論 (group theory) 的偉大成就。

我們可以說拉格朗日開啟了數學史 (特別是法國數學史) 的黃金歲月, 從他開始, 法國數學界基本上就站上數學界的最前緣而且人才輩出, Laplace, Poisson, Fourier, Cauchy, . . ., Poincaré, 基本上法國數學界的人才, 一直到現在從來都沒有斷過。由此不難想像當 1796 年拿破崙併吞義大利北方的皮埃蒙特 (Piemonte) 時還特別差人拜訪人還在都靈 (Turin) 拉格朗日的父親告訴他:

> 『*你的兒子, 由於他的天才給全人類帶來了榮耀。皮埃蒙特爲產生了他而感到驕傲。法國則爲擁有他而深感到驕傲。*』

綜觀拉格朗日的一生, 他是幸福的, 雖然有一段時間因爲過度勞累導致憂鬱症, 進而對數學的未來感到灰心。但正是他開創性的工作影響了後面的柯西 (Cauchy), Abel, Galois, 與高斯

[1]真正而言, 歐拉 (1748) 對於參數變數法的貢獻是有優先權的, 但由於拉格朗日 (1774) 是從天體力學的角度而來, 所以對後來的研究有更具體的影響。拉格朗日於 1808～1810 年間給出參數變數法最終的形式。

(Gauss) 給數學注入新的思想與生命。最幸運的是, 在拉格朗日有生之年親身見證到高斯令人滿意地開始了他偉大的事業。

2. 參數變數法的思想

我們的目的是解二階非齊次線性微分方程

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = g(t). \tag{2.1}$$

第一步是考慮齊次線性微分方程

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = 0. \tag{2.2}$$

假設 $u_1(t), u_2(t)$ 是 (2.2) 的兩組獨立解, 則 (2.2) 的一般解 (general solution) 也就是 (2.1) 的齊次解 (homogeneous solution) 爲 $\{u_1(t), u_2(t)\}$ 的線性組合

$$u_h(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

根據我們對微分方程的理解 $\{u_1(t), u_2(t)\}$ 是結構, 這是微分方程的本質不應改變, 而 $\{c_1, c_2\}$ 可以視爲振幅 (amplitude)。這裡拉格朗日受 d'Alembert 的降階法的激勵, 將常數 $\{c_1, c_2\}$ 換爲函數 $\{v_1(t), v_2(t)\}$, 考慮

$$u(t) = v_1(t)u_1(t) + v_2(t)u_2(t), \tag{2.3}$$

也就是容許振幅是變動的。因爲參數由常數轉換爲變數, 我們就稱它爲拉格朗日參數變數法 (Lagrange's variation of parameters), 這個名詞取得非常精準。(2.3) 微分一次, 並特別寫爲底下之形式

$$u' = v_1u_1' + v_2u_2' + (v_1'u_1 + v_2'u_2). \tag{2.4}$$

在這裡必須有所取捨, 否則

『易有太極, 是生兩儀, 兩儀生四象, 四象生八卦 ...』

— 周易 · 繫辭上 —

沒完沒了! 在此 Lagrange 的創見就在於比較 $\{v_1, v_2\}$ 與 $\{u_1, u_2\}$ 何者重要? $\{u_1, u_2\}$是微分方程的基本結構必須保持!$\{v_1, v_2\}$是參數尚未決定, 我們有相當大的彈性可以選取 (2.4) 右邊的括弧爲零：

$$v_1'u_1 + v_2'u_2 = 0. \tag{2.5}$$

($\{v_1, v_2\}$ 沒有資格跟著 $\{u_1, u_2\}$ 聞雞起舞!) 如此 (2.4) 的困難馬上減少一半

$$\begin{aligned} u' &= v_1 u_1' + v_2 u_2', \\ u'' &= v_1 u_1'' + v_2 u_2'' + (v_1' u_1' + v_2' u_2'). \end{aligned} \tag{2.6}$$

函數 $u(t)$ 必須滿足原微分方程 (2.1), 因此簡單的計算得

$$v_1' u_1' + v_2' u_2' = g(t). \tag{2.7}$$

將 (2.5)、(2.7) 兩者合併, (v_1', v_2') 滿足聯立 (代數) 方程組

$$\begin{aligned} v_1' u_1 + v_2' u_2 &= 0, \\ v_1' u_1' + v_2' u_2' &= g(t). \end{aligned} \tag{2.8}$$

利用 Cramer 法則[2]可以得 (v_1', v_2'),

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2(t) \\ g(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{-g(t)u_2(t)}{W(t)}, \\ v_2'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} u_1(t) & 0 \\ u_1'(t) & g(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{g(t)u_1(t)}{W(t)}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

而且自然而然 Wronskian

$$W(t) = W[u_1(t), u_2(t)] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

就會出現! (並不是由定義而來!) Lagrange 這個方法最大的優點是對於不是常係數的線性微分方程仍然成立。(2.9) 從 0 到 t 積分得

$$\begin{aligned} v_1(t) &= c_1 - \int_0^t \frac{g(s)u_2(s)}{W(s)} ds, \qquad c_1 \in \mathbb{R}, \\ v_2(t) &= c_2 + \int_0^t \frac{g(s)u_1(s)}{W(s)} ds, \qquad c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

[2]值得一提的是我們得到的是微分 (v_1', v_2') 並不是直接得到 (v_1, v_2), 因爲我們的問題是微分方程!

所以根據 (2.3), 二階非齊次線性微分方程 (2.1) 的解爲

$$u(t) = v_1(t)u_1(t) + v_2(t)u_2(t) = u_h(t) + \int_0^t K(s,t)g(s)ds, \tag{2.12}$$

其中

$$K(s,t) = \frac{u_1(s)u_2(t) - u_2(s)u_1(t)}{W(s)}. \tag{2.13}$$

這裡我們清楚看到 (2.1) 的特解是以積分的形式表示爲

$$u_p(t) = \int_0^t K(s,t)g(s)ds. \tag{2.14}$$

註解:

(i) Wronskian 是一個行列式 (determinant), 由波蘭數學家 Józef Hoene-Wroński (1776 ∼1853), 於 1812 年提出。它在微分方程的研究主要用於證明一組解的線性獨立性, 可以視爲線性方程組之推廣, 這話怎麼說? 以平面而言線性代數的向量是直線要判斷兩條直線 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 是否相交 (即相依或獨立), 只需要看 $\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, a_{21})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_2 = (a_{12}, a_{22})^{\mathrm{T}}$ 所形成的行列式是否爲零。然而微分方程的解 $u(t)$ 是一條曲線, 或者從牛頓力學來看是一個運動軌跡, 需要給定初始位置 $u(t)$ 與初速度 $u'(t)$ 才能決定運動軌跡。這正是 Wronskian 的幾何意義

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}.$$

由 (2.10) 簡單的量綱分析可得 W 的量綱

$$[W] = [u_1u_2'] = [u_2u_1'] = \frac{[u]^2}{[t]}. \tag{2.15}$$

(ii) 從 (v_1, v_2), 也就是 (2.9)−(2.11), 來看 (2.1) 的特解 $u_p(t)$ 是非齊次項 $g(t)$ 的一次積分, 這是合理的。因爲 $u_p(t)$ 與 $g(t)$ 正是微分的關係, 所以要從 $g(t)$ 得到 $u_p(t)$ 當然是積分。但是 (2.1) 基本上是二次微分然而 (2.14) 卻只有一次積分, 還有一次積分跑到那裡去? 實際上隱藏在積分核 $K(s,t)$ 裡面。量綱分析得

$$(2.13) \quad \Longrightarrow \quad [K(s,t)] = \frac{[u]^2}{[u]^2/[t]} = [t].$$

從量綱的角度而言 $K(s,t)$ 本質上是積分一次, 也就是說 (2.14) 本質上是積分兩次所以是合理的。

(iii) 參數變數法對於所有二階非齊次線性微分方程 (2.1) 都成立, 並沒有限定是常係數微分方程, 這是它最大的優勢, 但美中不足的是, 所對應齊次微分方程的兩個獨立解 $\{u_1, u_2\}$ 可能並不容易得到。

(iv) 由 (2.13) 乍看之下 (因爲書本或上課的老師取的例子太過特殊), 大部分的人會誤以爲 $K(s,t)$ 是對稱, $K(s,t)=K(t,s)$, 那是忽略了分母而導致的。因爲 W 與 s 有關, 所以

$$K(s,t)=K(t,s) \quad\Longleftrightarrow\quad W(s)=W(t). \tag{2.16}$$

要回答 (2.16) 這個問題自然需藉助於 Abel 公式 ([1, 2, 7]):

$$W'+p(t)W=0 \quad\Longrightarrow\quad W(t)=W(s)\exp\left(\int_s^t p(\xi)d\xi\right). \tag{2.17}$$

由此可知 (2.16) 成立的前提是 $p(t)=0$,

$$\mathscr{L}[u]=u''+q(t)u=\mathscr{L}^*[u], \tag{2.18}$$

也就是 $\mathscr{L}=\mathscr{L}^*$, 意思是 $\mathscr{L}$ 是一個自件算子 (self-adjoint operator): 一個件隨算子等於自己的算子。微分算子要有好的對稱性, 則對應的 $K(s,t)$ 才有可能是對稱的。

3. 微分方程的基本解

我們將 (2.1) 表示爲算子的形式

$$\mathscr{L}[u]\overset{\text{def}}{=}u''+p(t)u'+q(t)u=g(t). \tag{3.1}$$

解 (3.1) 相當於求 $\mathscr{L}$ 的反算子(inverse operator)。如果 $\mathscr{L}^{-1}$ 存在的話則由 (2.14) 得

$$u_p(t)=\mathscr{L}^{-1}[g]\overset{\text{def}}{=}\int_0^t K(s,t)g(s)ds, \tag{3.2}$$

也就是 $\mathscr{L}^{-1}$ 是由 (3.2) 所定義的積分算子 (integral operator), 其中 $K(s,t)$ 是 $\mathscr{L}^{-1}$ 的積分核 (integral kernel), 那麼 $K(s,t)$ 真正是甚麼? 回到 (3.1) 則由 (3.2) 得

$$g(t)=\mathscr{L}[\mathscr{L}^{-1}(g)]=\mathscr{L}\left[\int_0^t K(s,t)g(s)ds\right]=\int_0^t \mathscr{L}[K(s,t)]g(s)ds. \tag{3.3}$$

比較 (3.3) 左右兩式再根據 Dirac δ-函數結論

$$\mathscr{L}[K(s,t)]=\delta(s-t). \tag{3.4}$$

所以 $K(s,t)$ 是微分算子 $\mathscr{L}$ 的基本解 (fundamental solution)。當 $p(t),q(t)$ 是常數時, 二階微分方程 (2.1) 的齊次解與對應的基本解 $K(s,t)$ 是底下三種情形之一:

(1) 兩個相異實根: $u_1(t)=e^{m_1t}$, $u_2(t)=e^{m_2t}$,

$$K(s,t)=\frac{e^{m_2(t-s)}-e^{m_1(t-s)}}{m_2-m_1}, \qquad m_1\neq m_2. \tag{3.5}$$

特殊情形 $m_1=-m, m_2=m$ 則

$$K(s,t)=\frac{e^{m(t-s)}-e^{-m(t-s)}}{2m}=\frac{1}{m}\sinh m(t-s). \tag{3.6}$$

(2) 重根: $u_1(t)=e^{mt}, \quad u_2(t)=te^{mt}$,

$$K(s,t)=(t-s)e^{m(t-s)}. \tag{3.7}$$

(3) 共軛複數根: $u_1(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad u_2(t)=e^{\alpha t}\sin\beta t$,

$$K(s,t)=\frac{\sin\beta(t-s)}{\beta}e^{\alpha(t-s)}. \tag{3.8}$$

此時積分核由兩個變數降爲單變數並寫爲平移的樣式

$$K(s,t)=K(s-t), \qquad (s,t)\to s-t, \tag{3.9}$$

而特解是以卷積 (convolution) 的形式表現出來

$$u_p(t)=\int_0^t K(s-t)g(s)ds=K*g. \tag{3.10}$$

而且不管是哪一種情形 $K(s,t)$ 的量綱都是 $[K(s,t)]=[t]$。以 (3.8) 爲例

$$[\sin\beta(t-s)]=[e^{\alpha(t-s)}]=1 \quad\Longrightarrow\quad [\beta]=[\alpha]=\frac{1}{[t]}, \quad [K(s,t)]=\frac{1}{[\beta]}=[t].$$

此時 (3.5)–(3.8) 更清楚告訴我們 $K(s,t)$ 不見得是對稱的! 順便一提, 由 (3.5), 令 $m_2\to m_1$ 取極限也可以得 (3.7)

$$\lim_{m_2\to m_1}\frac{e^{m_2(t-s)}-e^{m_1(t-s)}}{m_2-m_1}=(t-s)e^{m_1(t-s)}. \tag{3.11}$$

這是處理重根時的好方法。

註解:

(i) 基本解 (3.4) 的物理意義可以這麼看: 將 $\delta(s-t)$ 視爲在時間 $t=s$ 的單位脈衝 (unit impulse), 則經過微分算子 $\mathscr{L}$ 的作用之後, 在時間 t 反應出來的解 (位移) 就是基本解 $K(s,t)$:

$$\mathscr{L}[u]=\delta(s-t) \quad\Longrightarrow\quad u=K(s,t). \tag{3.12}$$

從電磁學的角度而言, 可以將 $\delta(s-t)$ 視爲單位點電核 (unit charge), 則 $K(s,t)$ 就是單位點電核所產生的電位 (electric potential)。對於非齊次微分方程 (3.1) 則將 $g(t)$ 表示爲 Riemann 和 (Riemann sum)

$$g(t)\approx\sum_i g(s_i)\delta(t-s_i)\triangle s_i, \tag{3.13}$$

也就是把 $g(t)$ 表示爲所有在 $t = s_i$ 強度爲 $g(s_i)$ 之脈衝 (或點電核) 的和, 則系統所產生的解 (位移或電位) 是

$$u(t) \approx \sum_i g(s_i)K(t, s_i)\triangle s_i \approx \int g(s)K(t, s)ds. \tag{3.14}$$

(ii) 歷史上第一個提出上述 (i) 這種直觀的論證方式, 是英國自學成功的電氣物理學家 (也可以稱他爲數學物理學家) George Green (1793∼1841)。我是在劉太平院士的演講中學到的, 他也告訴我這個漂亮的論述方法就是格林 (G. Green) 所給的, 下一節所談的格林函數 (Green's function) 也是他的貢獻。

(iii) 積分核表示爲 (3.9) 這個簡單漂亮的形式, 還有微分方程的 (特) 解是以 (3.10) 這種卷積的形式表現出來, 是有深刻的物理意義。一個微分方程也就是一個物理系統, 經過時間或空間平移是不變, 則它的解會以卷積的形式展現出來, 而積分則說明非齊次項對於系統的影響是非局部效應 (non-local effect) 或記憶效應 (memory effect), 從最開始到時間 t 對 $u_p(t)$ 都有影響, 卷積則是告訴我們把所有的平移量全部疊加起來。

定理 3.1: 假設 E 是二階微分算子 $\mathscr{L}$ 的基本解

$$\mathscr{L}[E] = E'' + p(t)E' + q(t)E = \delta(t), \tag{3.15}$$

則 $E(t) = H(t)z(t)$ 其中 $H(t)$ 是 Heaviside 函數

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

而 $z(t)$ 則滿足二階齊次線性微分方程的初值問題

$$\begin{aligned} &\text{(D.E.)} \qquad \mathscr{L}[z] = z'' + p(t)z' + q(t)z = 0, \\ &\text{(I.C.)} \qquad z(0) = 0, \quad z'(0) = 1. \end{aligned} \tag{3.16}$$

證明: 首先我們需要廣義函數微分 $H'(t) = \delta(t)$ 則直接微分得

$$E'(t) = (H(t)z(t))' = H(t)z'(t) + H'(t)z(t) = H(t)z'(t) + \delta(t)z(t).$$

這裡需要釐淸 $\delta(t)z(t)$, 根據廣義函數的定義

$$\begin{aligned} \langle \delta(t)z(t), \varphi(t)\rangle &= \langle \delta(t), z(t)\varphi(t)\rangle = z(0)\varphi(0) \\ &= z(0)\langle \delta(t), \varphi(t)\rangle = \langle \delta(t)z(0), \varphi(t)\rangle, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

由此與初始值 (3.16) 得

$$\delta(t)z(t) = \delta(t)z(0) = 0. \tag{3.17}$$

所以

$$E'(t) = H(t)z'(t) + \delta(t)z(0) = H(t)z'(t).$$

同理, 重複上面的計算並利用初始值 (3.16) 得二次微分

$$\begin{aligned} E''(t) &= H(t)z''(t) + H'(t)z'(t) \\ &= H(t)z''(t) + \delta(t)z'(t) \\ &= H(t)z''(t) + \delta(t)z'(0) = H(t)z''(t) + \delta(t). \end{aligned}$$

整理得

$$E'' + p(t)E' + q(t)E = H(t)\Big(z'' + p(t)z' + q(t)z\Big) + \delta(t) = \delta(t). \qquad \square$$

註解:

(i) 按照基本解的定義 (3.15), 由於 δ-函數使得求基本解有技術上的困難, 所以 (3.16) 提供了實際可操作的方法來構造常微分方程的基本解。而其背後的理由是 Duhamel 原理: 非齊次方程 (3.15) 的非齊次項 $\delta(t)$ 可以轉換到齊次方程 (3.16) 的初始值。與此最接近的是波動方程兩個基本解的定義。

(ii) 利用 (3.16) 可以重新得二階微分方程的基本解:

$$\begin{aligned} E_1'' - m^2E_1 = \delta(t) \quad &\Longrightarrow \quad E_1(t) = \frac{\sinh mt}{m}H(t), \\ E_2'' = \delta(t) \quad &\Longrightarrow \quad E_2(t) = tH(t), \\ E_3'' + m^2E_3 = \delta(t) \quad &\Longrightarrow \quad E_3(t) = \frac{\sin mt}{m}H(t), \end{aligned} \tag{3.18}$$

或更一般的情形

$$\begin{aligned} E_4'' - (m_1+m_2)E_4' + m_1m_2E_4 = \delta(t) \quad &\Longrightarrow \quad E_4(t) = \frac{e^{m_2t} - e^{m_1t}}{m_2 - m_1}H(t), \\ E_5'' - 2mE_5' + m^2E_5 = \delta(t) \quad &\Longrightarrow \quad E_5(t) = te^{mt}H(t), \\ E_6'' - 2kE_6' + (k^2+m^2)E_6 = \delta(t) \quad &\Longrightarrow \quad E_6(t) = \frac{\sin mt}{m}e^{kt}H(t). \end{aligned} \tag{3.19}$$

而且不管是哪一種情形其量綱都是

$$[E_i] = \frac{1}{[m]} = [t], \qquad i = 1, 2, \ldots, 6.$$

4. 格林函數 (Green's Function)

開宗明義而言: 格林函數是滿足邊界條件的基本解, 所以在這節我們考慮的函數是位置 x 的函數 $u = u(x)$。在第三節我們知道基本解是否對稱, 與算子本身的對稱性有密切關係, 我們考慮自伴型微分算子或散度型 (divergence form) 邊界值問題

$$
\begin{aligned}
&\text{(D.E.)} \quad \mathscr{L}[u] = \big(p(x)u'\big)' + q(x)u = g(x), \qquad a \le x \le b \\
&\text{(B.C.)} \quad \begin{cases} B_a[u] = h_1 u(a) - h_2 u'(a) = 0, \\ B_b[u] = H_1 u(b) + H_2 u'(b) = 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

設 u_1, u_2 爲二階齊次微分方程 $\mathscr{L}[u] = 0$ 之二個獨立解且滿足一邊各一個邊界值

$$
\begin{cases} \mathscr{L}[u_1] = 0, \qquad B_a[u_1] = h_1 u_1(a) - h_2 u_1'(a) = 0, \\ \mathscr{L}[u_2] = 0, \qquad B_b[u_2] = H_1 u_2(b) + H_2 u_2'(b) = 0. \end{cases} \tag{4.2}
$$

在處理邊界值問題時這一步是至關重要的。重複第二節的參數變數法可以假設非齊次微分方程 (4.1) 之解爲

$$
u(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x). \tag{4.3}
$$

此時$\{v_1, v_2\}$滿足

$$
\begin{cases} v_1' u_1 + v_2' u_2 = 0, \\ v_1' u_1' + v_2' u_2' = \dfrac{g}{p}. \end{cases} \tag{4.4}
$$

由 Cramer 法則

$$
\begin{cases} v_1'(x) = \dfrac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ \frac{g}{p} & u_2' \end{vmatrix} = \dfrac{-g(x)u_2(x)}{p(x)W(x)}, \\ v_2'(x) = \dfrac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ u_1' & \frac{g}{p} \end{vmatrix} = \dfrac{g(x)u_1(x)}{p(x)W(x)}. \end{cases} \tag{4.5}
$$

與 (2.9) 比較分母多了 $p(x)$, 這個難題可以透過拉格朗日恆等式 (Lagrange's identity) 來克服, 這是研究邊界值問題的基本方法。

引理 4.1: 令 $\mathscr{L}[u]$ 是二階微分算子定義爲

$$
\mathscr{L}[u] \stackrel{\text{def}}{=} (p(x)u')' + q(x)u, \tag{4.6}
$$

則下列拉格朗日恆等式成立

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \mathscr{L}[u_1] & \mathscr{L}[u_2] \end{vmatrix} = \frac{d}{dx}\left\{p(x)\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}\right\} = \frac{d}{dx}\Big[p(x)W(x)\Big], \tag{4.7}$$

或

$$u_1\mathscr{L}[u_2] - u_2\mathscr{L}[u_1] = \frac{d}{dx}\Big[p(u_1u_2' - u_2u_1')\Big]. \tag{4.8}$$

證明: 直接計算, 我們就省略了 (請參考 [1, 2, 5, 6, 9])。 □

回到 (4.5), $\{u_1, u_2\}$ 爲二階齊次微分方程 $\mathscr{L}[u] = 0$ 之兩個獨立解, 而且 $\lambda = 0$ 非 $\mathscr{L}$ 之固有值, 所以 $W(x) \neq 0$ 而且

$$\frac{d}{dx}\Big[p(x)W(x)\Big] = 0 \quad\Longrightarrow\quad p(x)W(x) = p(a)W(a), \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{4.9}$$

其次爲了確定 $u_1(x), u_2(x)$ 我們需要決定其邊界值。由 (4.3) 定義的 $u(x)$ 必須滿足邊界條件 $(4.1)_2$, 先考慮 $x = a$, 則由 (4.2) 與 (4.7) 可得

$$\begin{aligned} B_a[u] &= h_1\Big[v_1(a)u_1(a) + v_2(a)u_2(a)\Big] - h_2\Big[v_1(a)u_1'(a) + v_2(a)u_2'(a)\Big] \\ &= v_1(a)\Big[h_1u_1(a) - h_2u_1'(a)\Big] + v_2(a)\Big[h_1u_2(a) - h_2u_2'(a)\Big] \\ &= v_2(a)\Big[h_1u_2(a) - h_2u_2'(a)\Big] = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

因此可以要求 $v_2(a) = 0$。同理, 對於 $x = b$ 可得 $v_1(b) = 0$。因此根據 (4.5), $v_1'(x)$ 從 x 到 b 積分, 而 $v_2'(x)$ 從 a 到 x 積分, 並利用 $v_1(b) = v_2(a) = 0$ 得

$$\begin{cases} v_1(x) = c_1 + \dfrac{1}{p(a)W(a)}\displaystyle\int_x^b g(\xi)u_2(\xi)d\xi, & c_1 \in \mathbb{R}, \\ v_2(x) = c_2 + \dfrac{1}{p(a)W(a)}\displaystyle\int_a^x g(\xi)u_1(\xi)d\xi, & c_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.11}$$

所以 (4.1) 的特解爲 (取 $c_1 = c_2 = 0$)

$$\begin{aligned} u_p(x) &= v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x) \\ &= \frac{1}{p(a)W(a)}\Big[u_2(x)\int_a^x g(\xi)u_1(\xi)d\xi + u_1(x)\int_x^b g(\xi)u_2(\xi)d\xi\Big] \\ &= \mathscr{L}^{-1}[g] \overset{\text{def}}{=} \int_a^b G(x,\xi)g(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{4.12}$$

其中

$$G(x,\xi) = \frac{1}{p(a)W(a)} \begin{cases} u_1(x)u_2(\xi), & a \le x \le \xi \\ u_1(\xi)u_2(x), & \xi \le x \le b \end{cases}$$
$$= \frac{1}{p(a)W(a)}\Big(u_1(x)u_2(\xi)H(\xi-x) + u_1(\xi)u_2(x)H(x-\xi)\Big) \tag{4.13}$$

就是 (4.1) 的格林函數。而 $\mathscr{L}^{-1}$ 是以格林函數 $G(x,\xi)$ 為積分核的積分算子。

註解:

(i) (4.12)–(4.13) 沒有保證 $G(x,\xi) = G(x-\xi)$, 特解可以表示為卷積(convolution) 那是極為特殊的微分算子才有的性質。

(ii) 因為 $p(x)W(x)$ 是常數, 由 (4.13) 顯然可知 Green 函數是對稱的: $G(x,\xi) = G(\xi,x)$, 而其根本原因是微分算子 $\mathscr{L}$ 是一個自伴算子 (self-adjoint operator), 其邏輯順序為

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^* \quad\Longrightarrow\quad \frac{d}{dx}\Big[p(x)W(x)\Big] = 0 \quad\Longrightarrow\quad G(x,\xi) = G(\xi,x).$$

大部分的書都把中間這一步跳過去了! 然而從這裡才可以看到拉格朗日恆等式 (4.7) 或 (4.8) 的重要性。

(iii) 拉格朗日恆等式的積分就是格林第二恆等式 (Green's 2nd identity)

$$\int_a^b \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \mathscr{L}[y_1] & \mathscr{L}[y_2] \end{vmatrix} dx = \int_a^b \frac{d}{dx}\left\{p(x)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\right\} dx = p(b)W(b) - p(a)W(a), \tag{4.14}$$

或

$$\int_a^b y_1\mathscr{L}[y_2] - y_2\mathscr{L}[y_1]dx = \int_a^b \frac{d}{dx}\Big[p(y_1y_2' - y_2y_1')\Big]dx = p(b)W(b) - p(a)W(a). \tag{4.15}$$

格林第二恆等式本質上就是分部積分 (integration by parts)。在偏微分方程理論中最著名的是 Laplace 算子的格林第二恆等式

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)dS_{\boldsymbol{x}}. \tag{4.16}$$

這幾乎是所有偏微分方程漂亮理論的起點。

(iv) 拉格朗日與格林恆等式並沒有限定在自伴算子; 若

$$\mathscr{L} = a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x), \tag{4.17}$$

則由 Leibniz 法則 (其原則是想辦法化爲全微分) 可得

$$\mathscr{L}^*[v] = \frac{d^2}{dx^2}(av) - \frac{d}{dx}(bv) + cv.$$

所以 $\mathscr{L}$ 的伴隨算子 (adjoint operator) 定義爲

$$\mathscr{L}^* \stackrel{\text{def}}{=} a\frac{d^2}{dx^2} + (2a' - b)\frac{d}{dx} + (a'' - b' + c). \tag{4.18}$$

此時拉格朗日等式與格林第二恆等式分別是

$$v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{L}^*[v] = \frac{d}{dx}J(u, v), \tag{4.19}$$

$$\int_a^b \Big(v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{L}^*[v]\Big)dx = J(u, v)\Big|_a^b, \tag{4.20}$$

其中連接函數 $J(u, v)$ 定義爲

$$J(u, v) = av\frac{du}{dx} - \frac{d}{dx}(av)u + buv; \tag{4.21}$$

基本上它是 u, v (包含一次微分) 的齊次函數, 更精確地說 $J(u, v)$ 是一個雙線性形式 (bilinear form)。(4.20) 可以毫無困難地直接推廣到n階微分方程, 有興趣的讀者可以查閱相關書籍, 在此就不多贅述。

(v) 格林第二等式 (4.20) 可以走得更遠, 其實它是微分方程弱解 (weak solution) 的發源地。如果可以選取 $v = G(x, \xi)$ 滿足

$$\mathscr{L}^*[G(x, \xi)] = \delta(\xi - x),$$

則$\mathscr{L}[u] = g$的解可以表示爲

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi)g(\xi)d\xi + (\text{B.C.}) \tag{4.22}$$

(vi) 伴隨算子是轉置矩陣 (transpose matrix) 在無窮維空間的推廣, 其本質是分部積分 (integration by part), 也就是說, (無窮維) 分部積分這個動作相當於 (有限維) 矩陣的轉置, 最終它們是藉由內積 (inner product) 來定義以擺脫維數與外表形式的限制。換句話說, 研究微分方程就自然而然與泛函分析的 Hilbert 空間有密切關係。

真正的格林函數必須從格林第二等式也就是分部積分出發 (而這正是弱解的源頭)

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{L}u, G\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b (p(\xi)u')'G(\xi, x) + q(\xi)uG(\xi, x)d\xi \\ &= \Big[p(\xi)u'(\xi)G(\xi, x) - p(\xi)u(\xi)G_\xi(\xi, x)\Big]_a^b \\ &\quad + \int_a^b u(\xi)\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(p(\xi)\frac{\partial G(\xi, x)}{\partial\xi}\Big) + q(\xi)G(\xi, x)\Big]d\xi.\end{aligned} \tag{4.23}$$

由邊界條件 $(4.1)_2$ 計算得邊界項

$$
\begin{aligned}
&p(b)\Big[u'(b)G(b,x)-u(b)G_\xi(b,x)\Big]-p(a)\Big[u'(a)G(a,x)-u(a)G_\xi(a,x)\Big] \\
=&-\frac{p(b)u(b)}{H_2}\Big[H_1G(b,x)+H_2G_\xi(b,x)\Big]-\frac{p(a)u(a)}{h_2}\Big[h_1G(a,x)-h_2G_\xi(a,x)\Big].
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

由 (4.23)−(4.24) 可以選取 $G(\xi,x)$ 滿足

$$
\begin{aligned}
&\text{(D.E.)}\quad \mathscr{L}^*G=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(p(\xi)\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial\xi}\right)+q(\xi)G(\xi,x)=\delta(\xi-x),\\
&\text{(B.C.)}\quad \begin{cases} B_a[G]=h_1G(a,x)-h_2G_\xi(a,x)=0,\\[2ex] B_b[G]=H_1G(b,x)+H_2G_\xi(b,x)=0.\end{cases}
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

此時 (4.23) 就是 Green's 第二恆等式

$$
\langle g,G\rangle=\langle\mathscr{L}u,G\rangle=\langle u,\mathscr{L}^*G\rangle=\langle u,\delta\rangle. \tag{4.26}
$$

利用 δ-函數與格林函數的性質得 (4.1) 的表現式

$$
u(x)=\int_a^b\delta(\xi-x)u(\xi)d\xi=\int_a^b G(\xi,x)g(\xi)d\xi. \tag{4.27}
$$

最後的步驟只需要解 (4.25) 得格林函數。我們將在下一節實際算一個例題以明白裡面的細節。

註解:

(i) 類似於定理 3.1 裡面基本解 (3.15) 與 (3.16) 的關係, 對於格林函數 (4.25) 也有等價的表達式

$$
\begin{aligned}
&\text{(D.E.)}\quad \mathscr{L}^*G=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(p(\xi)\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial\xi}\right)+q(\xi)G(\xi,x)=0,\qquad \xi\neq x,\\
&\text{(J.C.)}\quad \lim_{\epsilon\to0}\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial\xi}\bigg|_{x=\xi-\epsilon}^{x=\xi+\epsilon}=\frac{1}{p(\xi)}.
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

這相當於將方程式 (4.25) 的非齊次項的 $\delta(\xi-x)$ 轉移到 (4.28) 的跳躍條件 (J.C.), 實際計算時 (4.28) 可能比較容易操作。

5. 固有函數展開

先回顧非齊次線性方程組

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \tag{5.1}$$

將矩陣 A 刻意寫爲由行向量組成的列向量 (row vector) 而 $\boldsymbol{x}$ 則是行向量 (column vector)

$$A=[\boldsymbol{a}_1\quad \boldsymbol{a}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{a}_n],\qquad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}},$$

所以 (5.1) 可以改寫爲

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}. \tag{5.2}$$

求非齊次線性方程組 (5.1) 的解等價於將 $\boldsymbol{b}$ 表示爲 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ 的線性組合 (linear combination), 也就是 (5.1) 是否有解等價於 $\boldsymbol{b}\in R(A)=\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$, 這內在本質相當於固有函數展開。這話怎麼說? 假設矩陣 A 可以對角化, 意思是存在可逆矩陣 P 使得

$$AP=P\Lambda,\qquad \Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

$$P=[\boldsymbol{\xi}_1\quad \boldsymbol{\xi}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\xi}_n],\qquad A\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i,\qquad i=1,2,\ldots,n, \tag{5.4}$$

其中 λ_i 是固有值 (特徵值) 而 $\boldsymbol{\xi}_i$ 是相應固有向量 (特徵向量)。令 $\boldsymbol{y}=P^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}=P^{-1}\boldsymbol{b}$ 則 (5.1) 轉換爲非耦合 (decouple) 聯立方程組

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\quad\Longleftrightarrow\quad \Lambda\boldsymbol{y}=\boldsymbol{d}\quad\Longleftrightarrow\quad y_i=\frac{d_i}{\lambda_i},\qquad i=1,2,\ldots,n, \tag{5.5}$$

(假設 $\lambda_i\neq 0$)。這裡變數變換或座標變換就是固有函數展開

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{\xi}_1+y_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\xi}_n,\\ \boldsymbol{b}=P\boldsymbol{d}=d_1\boldsymbol{\xi}_1+d_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+d_n\boldsymbol{\xi}_n.\end{cases} \tag{5.6}$$

這裡清楚看到解非齊次線性方程組 (5.1) 的思想: 首先解固有值問題

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\quad\Longrightarrow\quad A\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i,\qquad i=1,2,\ldots,n,$$

得到固有值與固有向量 (函數), 並以此爲基底將未知數 $\boldsymbol{x}$ 與非齊次項 $\boldsymbol{b}$ 都表示爲固有函數展開 (5.6), 則最後只需要比較係數就可以得到非齊次線性方程組 (5.1) 的解

$$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{\xi}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\lambda_i}\boldsymbol{\xi}_i. \tag{5.7}$$

所以對角化的內在本質是: 固有函數展開 (eigenfunction expansion)。

我們將上面的討論推廣到非齊次微分方程

$$\begin{aligned} &\text{(D.E.)} \quad \mathscr{L}[u] = \big(p(x)u'\big)' + q(x)u = g(x), \qquad a \le x \le b, \\ &\text{(B.C.)} \quad \begin{cases} B_a[u] = h_1 u(a) - h_2 u'(a) = 0, \\ B_b[u] = H_1 u(b) + H_2 u'(b) = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.8}$$

固有函數展開是建立在泛函分析的 Hilbert 空間, 所以對 (5.8) 這個問題自然要引進內積

$$\langle f, g\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

首先解 (5.8) 所對應的固有值問題

$$\begin{aligned} &\text{(D.E.)} \quad \mathscr{L}[\varphi] + \lambda\varphi = 0, \qquad a \le x \le b, \\ &\text{(B.C.)} \quad B_a[\varphi] = B_b[\varphi] = 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

根據 Sturm-Liouville 理論得固有值與固有函數 (λ_n, φ_n), $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} &\text{(D.E.)} \quad \mathscr{L}[\varphi_n] + \lambda_n\varphi_n = 0, \qquad a \le x \le b, \\ &\text{(B.C.)} \quad B_a[\varphi_n] = B_b[\varphi_n] = 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

然後將未知函數 $u(x)$ 與非齊次項 $g(x)$ 都表示爲固有函數展開

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \tag{5.11}$$

其中 a_n 是待求的常數。因爲 $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$ 形成一正交族 (orthogonal family)。可以取內積得

$$\langle g, \varphi_m\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n, \varphi_m \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\langle\varphi_n, \varphi_m\rangle = c_m\langle\varphi_m, \varphi_m\rangle, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

所以 $g(x)$ 的係數 c_m 爲 (這相當於 Fourier 係數)

$$c_m = \frac{\langle g, \varphi_m\rangle}{\langle\varphi_m, \varphi_m\rangle} = \frac{1}{\langle\varphi_m, \varphi_m\rangle}\int_a^b \varphi_m(\xi)g(\xi)d\xi, \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{5.12}$$

代入非齊次微分方程 (5.8)

$$\mathscr{L}[u] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\mathscr{L}[\varphi_n] = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda_n\varphi_n = g = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n.$$

比較係數得

$$a_n = -\frac{c_n}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle}\int_a^b \varphi_n(\xi)g(\xi)d\xi, \qquad n=1,2,\ldots. \tag{5.13}$$

所以非齊次微分方程 (5.8) 的特解爲

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x) = \int_a^b G(x,\xi)g(\xi)d\xi, \tag{5.14}$$

其中

$$G(x,\xi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle} \tag{5.15}$$

正是微分算子 $\mathscr{L}$ 的格林函數。

註解:

(i) 簡單的量綱分析 (記得內積是積分!)

$$[g] = \frac{[p][u]}{[x]^2}, \quad [\lambda_n] = \frac{[p]}{[x]^2} \quad \Longrightarrow \quad [G] = \frac{1}{[\lambda_n][x]} = \frac{[x]}{[p]}.$$

如果將 p 視爲無量綱 (dimensionless) 則格林函數 $G(\xi,x)$ 基本上仍然是積分一次, 最終 $p(x)$ 會出現在 $G(\xi,x)$ 的分母而這正是 (4.13) 告訴我們的。而且 (5.14) 是量綱平衡

$$[u] = \left[\int_a^b G(x,\xi)g(\xi)d\xi\right] = \frac{[x]}{[p]}\frac{[p][u]}{[x]^2}[x].$$

例題 5.1: 試求二階非齊次微分方程的解

$$\begin{aligned} &\text{(D.E.)} \quad \mathscr{L}u = u'' = g(x), \qquad 0 \le x \le 1, \\ &\text{(B.C.)} \quad u(0) = u(1) = 0. \end{aligned} \tag{5.16}$$

解法一 (**固有函數展開**): 我們將問題拆解爲底下幾個步驟:

(1) 原微分方程所對應的固有值問題爲

$$\begin{aligned} &\text{(D.E.)} \quad \varphi'' + \lambda\varphi = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \\ &\text{(B.C.)} \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

(2) (5.17) 這個微分方程的解有三種情形: 指數函數、直線 (線性函數) 與三角函數, 但是邊界條件要求這個解從 $\varphi(0)=0$ 出發然後回到 $\varphi(1)=0$, 函數 φ 必須震盪所以 $\lambda>0$ 也就是 φ 一定是一個波。另外藉由量綱分析得出無量綱 (dimensionless) 的量

$$\frac{[\varphi]}{[x]^2} = [\lambda][\varphi] \quad \Longrightarrow \quad [\sqrt{\lambda}x] = 1.$$

可推論 φ 必然是 $\sqrt{\lambda}x$ 的函數

$$\varphi(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{5.18}$$

(3) Dirichlet 邊界條件 $\varphi(0) = 0$ 告訴我們 φ 在 $x = 0$ 附近的行爲必須是一個奇函數 (odd function), 否則它無法平滑地延拓到 $-1 < x < 0$。所以 φ 一定是正弦函數

$$\varphi(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

(4) 所謂特徵值或固有值問題就是特定的 λ 才有解, 而且是由邊界產生的

$$\varphi(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin\sqrt{\lambda} = 0. \tag{5.19}$$

這就是 (5.17) 的特徵方程式, 是線性代數 (有限維) 特徵方程式在無窮維空間的推廣。計算得固有值與固有函數得

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \qquad \varphi_n(x) = \sin n\pi x, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{5.20}$$

雖然有無窮多項但只需要第一項, 之後其它都呈整數倍出現。這正是 Fourier 級數美的原因, 而背後所蘊含意義則需等到量子力學的量子化 (quantization) 之後人們才真正明白其本質。

(5) 回到原來的非齊次微分方程問題, 將未知函數 $u(x)$ 與非齊次項 $g(x)$ 都表示爲固有函數展開 (也就是 Fourier 級數展開)

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \qquad g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x),$$

因爲

$$\langle\varphi_m, \varphi_n\rangle = \int_0^1 \sin m\pi x \sin n\pi x dx = \frac{1}{2}\delta_{mn}. \tag{5.21}$$

這意思是 $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots\}$ 形成一正交族 (orthogonal family), 則由 (5.12)–(5.13) 藉由內積計算可得係數 $(n = 1, 2, \ldots)$

$$c_n = \frac{\langle g, \varphi_n\rangle}{\langle\varphi_n, \varphi_n\rangle} = 2\int_0^1 g(\xi)\sin n\pi\xi d\xi,$$

$$a_n = -\frac{c_n}{\lambda_n} = -\frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 g(\xi)\sin n\pi\xi d\xi.$$

所以非齊次微分方程的解爲

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x) = \int_0^1 G(x, \xi)g(\xi)d\xi, \tag{5.22}$$

其中

$$G(x,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\sin n\pi\xi \tag{5.23}$$

正是微分算子 $\mathscr{L}=\frac{d^2}{dx^2}$ 藉由固有函數展開所得的格林函數。這裡我們不用煩惱邊界條件, 因爲在探討固有值問題時已經考慮進去了

$$B_a[\varphi_n]=B_b[\varphi_n]=0 \quad\Longrightarrow\quad B_a[u]=B_b[u]=0.$$

解法二 (Lagrange **參數變數法**): 首先 $\{1,x\}$ 是齊次微分方程 $\mathscr{L}u=u''=0$ 的兩組獨立解, 但是現在考慮的是邊界值問題所以不能直接取 $\{1,x\}$ 而是 $\{u_1(x),u_2(x)\}=\{x,x-1\}$ 分別滿足兩個邊界條件 $u_1(0)=u_2(1)=0$。因爲

$$W(x)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2\\ u_1' & u_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x-1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

所以 $\{u_1(x),u_2(x)\}$ 確實是兩組獨立解。根據 Lagrange 參數變數法可以假設

$$u(x)=v_1(x)u_1(x)+v_2(x)u_2(x), \tag{5.24}$$

並且滿足邊界條件

$$\begin{aligned} u(0)&=v_2(0)u_2(0)=0 \quad\Longrightarrow\quad v_2(0)=0,\\ u(1)&=v_1(1)u_1(1)=0 \quad\Longrightarrow\quad v_1(1)=0,\end{aligned} \tag{5.25}$$

則由 (4.4) 可知 $\{v_1,v_2\}$ 滿足

$$\begin{cases} v_1'u_1+v_2'u_2=0,\\ v_1'u_1'+v_2'y_2'=g.\end{cases}$$

再由 Cramer 法則得

$$\begin{cases} v_1'(x)=\dfrac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} 0 & u_2\\ g & u_2'\end{vmatrix}=-(x-1)g(x),\\ v_2'(x)=\dfrac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} u_1 & 0\\ u_1' & g\end{vmatrix}=xg(x).\end{cases} \tag{5.26}$$

積分得

$$v_1(x)=-\int_0^x(\xi-1)g(\xi)d\xi+c_1,\quad v_2(x)=\int_0^x\xi g(\xi)d\xi+c_2,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}. \tag{5.27}$$

兩個常數 c_1, c_2 可以由邊界條件 (5.25) 來決定

$$v_1(1) = v_2(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \int_0^1 (\xi - 1) g(\xi) d\xi, \qquad c_2 = 0.$$

所以非齊次微分方程的解可以表示爲

$$\begin{aligned} u(x) &= u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x) \\ &= -x \int_0^x (\xi - 1) g(\xi) d\xi + x \int_0^1 (\xi - 1) g(\xi) d\xi + (x - 1) \int_0^x \xi g(\xi) d\xi \\ &= \int_0^x (x - 1)\xi g(\xi) d\xi + \int_x^1 x(\xi - 1) g(\xi) d\xi \\ &= \int_0^1 G(\xi, x) g(\xi) d\xi, \end{aligned} \tag{5.28}$$

其中

$$G(\xi, x) = \begin{cases} (x - 1)\xi, & 0 \le \xi < x, \\ (\xi - 1)x, & x < \xi \le 1, \end{cases} \tag{5.29}$$

就是格林函數, 或者藉由 Heaviside 函數表示爲單一表現式

$$G(\xi, x) = (\xi - x) H(\xi - x) + (x - 1)\xi. \tag{5.30}$$

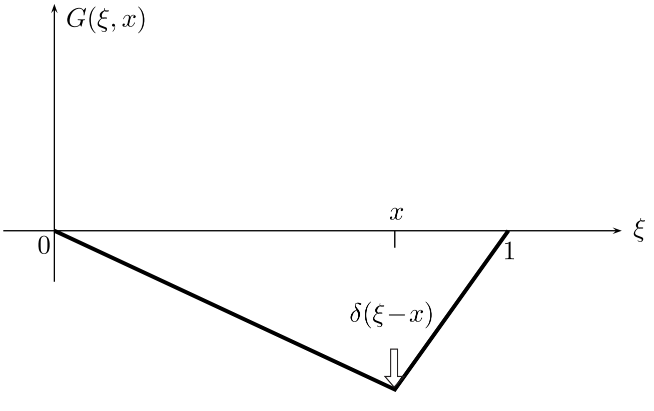


圖 2: 例題 5.1 的格林函數

解法三 (**格林函數**): 正如 (4.23)−(4.24) 的計算, 我們從分部積分出發

$$
\begin{aligned}
\langle \mathscr{L}u, G\rangle &\overset{\text{def}}{=} \int_0^1 u''(\xi)G(\xi,x)d\xi \\
&= \int_0^1 u''(\xi)G(\xi,x) + u'(\xi)G_\xi(\xi,x) - u'(\xi)G_\xi(\xi,x)d\xi \\
&= u'(\xi)G(\xi,x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \Big[u'(\xi)G_\xi(\xi,x) + u(\xi)G_{\xi\xi}(\xi,x)\Big]d\xi \\
&\qquad\qquad + \int_0^1 u(\xi)G_{\xi\xi}(\xi,x)d\xi \\
&= \Big[u'(\xi)G(\xi,x) - u(\xi)G_\xi(\xi,x)\Big]_0^1 + \int_0^1 u(\xi)\mathscr{L}^*G(\xi,x)d\xi \\
&= u'(1)G(1,x) - u'(0)G(0,x) + \langle u, \mathscr{L}^*G\rangle.
\end{aligned} \tag{5.31}
$$

由 (5.31) 的表現式可以選取 $G(\xi,x)$ 滿足

$$
\begin{aligned}
&\text{(D.E.)} \quad \mathscr{L}^*G = G_{\xi\xi}(\xi,x) = \delta(\xi - x), \qquad 0 \le x,\xi \le 1, \\
&\text{(B.C.)} \quad G(0,x) = G(1,x) = 0,
\end{aligned} \tag{5.32}
$$

可見 (5.31) 就是 Green's 第二恆等式

$$\langle g, G\rangle = \langle \mathscr{L}u, G\rangle = \langle u, \mathscr{L}^*G\rangle = \langle u, \delta\rangle. \tag{5.33}$$

利用δ-函數與格林函數的性質得

$$u(x) = \int_0^1 \delta(\xi - x)u(\xi)d\xi = \int_0^1 G(\xi,x)g(\xi)d\xi. \tag{5.34}$$

最後的步驟就是得出格林函數明確的表現式。首先由 G 的方程式積分得

$$G_{\xi\xi}(\xi,x) = \delta(\xi - x) \quad \Longrightarrow \quad G_\xi(\xi,x) = H(\xi - x) + A, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

再積分一次得

$$G(\xi,x) = (\xi - x)H(\xi - x) + A\xi + B, \qquad B \in \mathbb{R}. \tag{5.35}$$

常數A, B是由邊界條件來決定

$$
\begin{cases}
G(0,x) = 0 = B, \\
G(1,x) = 0 = (1 - x) + A + B
\end{cases}
\quad \Longrightarrow \quad B = 0, \quad A = x - 1,
$$

所以格林函數爲

$$G(\xi,x) = (\xi - x)H(\xi - x) + (x - 1)\xi.$$

就是 (5.29) 或 (5.30), 而方程式 (5.16) 的解則是

$$u(x)=\int_0^1 G(\xi,x)g(\xi)d\xi=\int_0^x (x-1)\xi g(\xi)d\xi+\int_x^1 x(\xi-1)g(\xi)d\xi$$

也完全與 (5.28)–(5.30) 吻合。 □

註解:

(i) 比較 (5.23) 與 (5.30) 得

$$\begin{aligned} G(\xi,x)&=(\xi-x)H(\xi-x)+(x-1)\xi \\ &=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\sin n\pi\xi, \end{aligned} \tag{5.36}$$

並且由格林函數滿足的方程式得 δ-函數的固有函數展開

$$\delta(\xi-x)=\mathscr{L}^*G=\mathscr{L}G=G_{\xi\xi}=\sum_{n=1}^{\infty}2\sin n\pi x\sin n\pi\xi. \tag{5.37}$$

這件事實也就是將$\delta(\xi-x)$視爲奇函數並展開爲 Fourier 正弦級數 (因爲 Dirichlet 邊界 $u(0)=0$)

$$\delta(\xi-x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi\xi;$$

Fourier 係數 b_n 可利用 δ-函數的特性計算得

$$b_n=2\int_0^1\delta(\xi-x)\sin n\pi\xi d\xi=2\sin n\pi x,$$

所以就回到 (5.37)。反回來可以利用 Fourier 正弦級數得 (5.37), 然後積分兩次也可以得 (5.36)。雖然 Heaviside 函數與 δ-函數是很糟糕的函數 (甚至不是一般意義下的函數), 仍然可以藉由 Fourier 級數 (也就是固有函數展開) 清楚它的內部結構, 這也是爲什麼 Fourier 分析會被這些了不起的科學家們 (Maxwell, Lord Kelvin, ...) 稱之爲《數學的詩篇》的緣由。

(ii) 這個例題討論的是邊界條件是 $u(0)=u(1)=0$, 可以稱之爲 Dirichlet-Dirichlet 邊界。同理可以討論其他邊界條件:

$$u'(0)=u(1)=0,\qquad \text{Neumann–Dirichlet 邊界},$$

$$u(0)=u'(1)=0,\qquad \text{Dirichlet–Neumann 邊界},$$

$$u'(0)=u'(1)=0,\qquad \text{Neumann–Neumann 邊界。}$$

差別的是固有值與固有函數, 此時 δ-函數分別是

$$\begin{aligned}\delta(\xi-x)&=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi,\\ \delta(\xi-x)&=2\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi,\\ \delta(\xi-x)&=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\pi x\cos n\pi\xi.\end{aligned}\tag{5.38}$$

(iii) 由 (5.23), (5.30) 或 (5.36) 容易判斷二階微分方程 (5.16) 的格林函數是對稱的

$$G(\xi,x)=G(x,\xi).$$

這是著名的 Maxwell Reciprocal Theorem (Maxwell 互易定理): 由於一點 x 處的單位點電荷 (載重) 而導致 ξ 點處的電位 (位移) 等於另一點 ξ 處的單位點電荷 (載重) 而導致的 x 處的電位 (位移)。

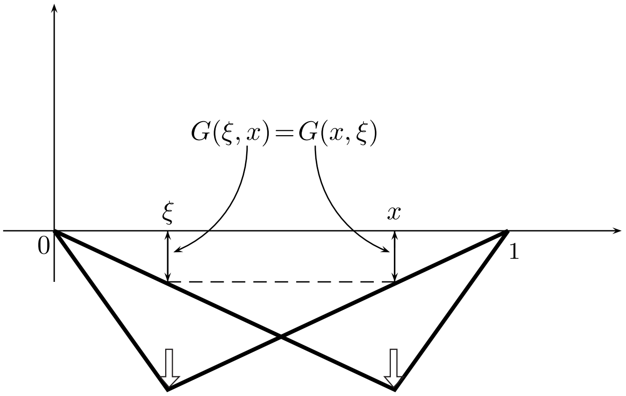


圖 3: Maxwell 互易定理

參考文獻

1. G. Birkhoff and G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations* (4th ed.), Wiley, New York, 1989.

這是進階的微分方程教科書。大二時我在書店看到覺得不錯就買了, 後來聽說王九逵教授在台大數學系教完大二微分方程之後給學生推薦的進階書籍就是這一本。本文的 Sturm-Liouville 問題與固有函數展開我是在這本書學到的, 同時也讓我學到泛函分析 (特別是 Hilbert 空間) 在微分方程的應用。本書第一作者 Garret Birkhoff (1911∼1996) 是美國第一位本土的國際級數學家 George David Birkhoff (1884∼1944) 的兒子, 數學史上父子都是著名數學家並不多見。Garret Birkhoff 另一本更著名教科書是與 Saunders

MacLane (1909∼2005) 輪流給哈佛 (Harvard) 與芝加哥大學部學生講授代數學, 並結合他們的教學心得合寫了《*A Survey of Modern Algebra*》一書, 這是美國第一本介紹 Emmy Noether (1882∼1935) 抽象概念的代數教材。

2. William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (10th ed.), Wiley, New York, 2013.
3. Jean Dieudonné, *History of Functional Analysis*, Notas de Matemática, no. 77, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1981. 中譯本: 泛函分析史, 曲安京, 李亞亞等譯, 高等教育出版社 (中國), 2016。

   Jean Dieudonné (1906∼1992) 是法國傑出數學家, 布爾巴基 (Bourbaki) 學派的重要成員。除了積極參與布爾巴基的學術活動之外 Dieudonné 最負盛名的是他寫了一套 10 本分析的專業書 (Treatise of Analysis), 第十本並沒有出版。另外他也寫了不少數學史的書, 我覺得都很值得閱讀。Dieudonné 曾於 1980 年代訪問台灣, 他那時候在清華大學的演講內容我完全忘了, 只記得一句:《*Integral operator is a good operator, differential operator is a bad ooperator.*》其實他演講完之後, 我跟在已故清華大學王懷權教授後面也請 Dieudonné 教授在他的文章上簽名, 只是後來出國留學還有幾次搬家已不見蹤影。但可以跟學生吹牛逼的是:『我聽過 Jean Dieudonné 的演講!』

4. William Dunham, The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue, Princeton University Press, Priceton, New Jersey, 2005. 中譯本: 微積分的歷程: 從牛頓到勒貝格, 李伯民, 汪軍, 張懷勇譯, 人民郵電出版社 (中國) (2010)。
5. Bernard Friedman, *Principles and Techniques of Applied Mathematics*, Dover Publication Inc., 1990.

   一開始接觸這本書就愛上它了, 基本上就是我教線性代數與微分方程 (應用數學) 最重要的參考書。這本書寫得非常庫朗所 (Courant Institute), 好的應用數學是以堅實的純數學爲基礎。許多號稱應用數學的書都寫得非常膚淺, 這完全是誤導。這本書的格林函數寫得特別有特色, 尤其是利用複變的 Cauchy 積分公式來推得格林函數最讓人驚羨。

6. Michael D. Greenberg; *Application of Green's Functions in Science and Engineering*, Dover Publication Inc., 2015.

   這是一本可愛的小書, 裡面的例題都是精挑細選, 對於理工科的學生特別合適。書中另一特色就是介紹廣義函數的方式非常直觀且友善, 自我學習也沒有太多困難, 讀者對廣義函數有興趣不妨從這本書開始。作者是航太機械工程的教授卻有很好的數學涵養, 一點都不輸給數學系的老師, 這也說明爲何人家的工學院是如此堅強, 因爲他們的數學家是遍佈在學校的各個角落。

7. Morris W. Hirsch and Stephen Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Pure and Applied Mathematics Vol. 60; Academic Press, 1974.

   本書作者之一 Stephen Smale 是美國數學家, 1961 年他以巧妙的方法繞過三維與四維的困難直接證明五維以上的廣義 Poincaré 臆測 (Poincaré conjecture), 他也因此獲得 1966 年的費爾茲獎 (Fields Medel)。這本書第三章到第六章將微分方程與線性代數做整合性的介紹, 在 1974 年數學界仍然將線性代數當作純代數在教的年代, 這是非常有開創性的見解。我自己教線性代數就是以這本書爲教學指南同時也介紹微分方程, 其實大部分出名的學校也都是這種教法, 那種強調結構與嚴格證明的教學來對待線性代數

基本是已經落伍了。曾經看過文章介紹說這本書的第十章所寫的電路學 (Electric Circuits) 是最有特色的一章, 但我個人不是這方面的專家沒有這種體會。但我知道動態系統 (Dynamical System) 的專家對這本書的評價是極高的。

8. Ivar Stakgold, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Vol. 1 & 2; Classic in Applied Mathematics, SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
9. Ivar Stakgold and Michael Holst, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, 3rd Edition; Pure and Applied Mathematics Vol. 99, John Wiley and Sons, Inc., 2011.

    這本書於 1979 出版, 其實是作者另一套書 [8] 的合訂版 (1967, 1968出版), 但更偏重於建模(modeling)。這本書是針對應用數學、工程與物理背景的學生而寫, 所以書寫的方式與傳統純數學的書有極大之差別, 直觀且友善。本書重點放在利用格林函數 (Green function) 與固有函數展開 (eigenfunction expansion) 來處理邊界值問題 (boundary value problem)。我個人最喜歡作者介紹的廣義函數論 (或荷佈理論), 並把各種 Green 等式做了系統式的整理, 由此可以看出微分方程弱解 (weak solution) 的起源。我們的數學系(研究所) 基本上沒有與這本書相當的課, 這是很可惜也極爲諷刺。由於作者的學養與文筆使得這本書自學也沒有太大的難度 (但也不要賤骨頭以爲看得懂就是簡單、trivial 瞧不起這本書, 它最開始可是哈佛 (Harvard) 的用書!), 我強烈推薦此書以學習廣義函數論與格林函數。

10. Lloyd Nick Trefethen, *An Applied Mathematician's Apology*, SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 2022. 中譯本: 一個應用數學家的辯白, 何生譯, 人民郵電出版社 (中國), 2023。

    對於閱讀豐富的讀者而言一眼就看出這本書似曾相識, 沒錯那就是哈代 (G. H. Hardy, 1877∼1947) 的《一個數學家的辯白》(*A Mathematician's Apology*)。哈代從自己的角度, 談論了數學中的美學, 給了門外漢一個機會以洞察工作中的數學家的內心。話雖如此, 哈代在書中闡述的觀點卻只是個人的, 甚至是誤導的, 他的觀點並不被所有的數學家認同, 而數學的發展也不按哈代個人的一廂情願而演進, 然而由於哈代的個人魅力還是影響了幾代的純數學家。不同於哈代這本書比較像作者的自白而不是辯白。作者是國際著名科學計算專家, 想藉由這本書宣揚他的信念: 用計算機完成數學研究是數學的重要主題之一。隨著時代的變遷, 特別是計算機的高速發展帶來計算的進步, 使得《數值分析》這門學科的地位越來越重要。一個跟得上時代的應用數學系應該重視數值分析及相關的課程與研究。通過這本書你不僅能看到這位充滿智慧與激情的數學名家的成長之路, 對於應用數學有更正確與健康的認識也能夠了解並領略應用數學的價值和魅力。

11. V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.

    這本書原文是俄文, 英文版於 1970 出版, 大四修研究所的《應用數學概論》李育嘉老師講廣義函數論 (或荷佈理論) 就是用這本書, 除了廣義函數論之外我個人最喜歡這本書寫的微分方程的基本解與高維空間的 Fourier 變換。自從讀研究所時在賴東昇老師那裡購得這本書之後, 它一直是我學習還有教偏微分方程最重要的參考書。

12. 林琦焜。傅立葉分析與應用。滄海書局, 2010。
13. 林琦焜。最小作用量原理。數學傳播季刊, 35(1), 15-28, 2011。
14. 林琦焜。談加減消去法。數學傳播季刊, 36(1), 38-52, 2012。
15. 林琦焜。用函數來思考(上、下)。數學傳播季刊, 43(3,4), 32-43, 54-70, 2019。

16. 林琦焜。d'Alembert 的降階法。數學傳播季刊, 46(2), 20-41, 2022。

—本文作者爲國立交通大學應用數學系退休教授—